УДК **517.982.22**

О ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ И АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ ПОДПРОСТРАНСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.С.Фещенко

Аннотация. В работе изучаются свойства представляющих систем подпространств и абсолютно представляющих систем подпространств в банаховых пространствах.

Ключевые слова: банахово пространство, представляющая система подпространств, абсолютно представляющая система подпространств.

1. Введение

Пусть X — линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{K}$ действительных или комплексных чисел, $X_k, k \geqslant 1,$ — система подпространств X (т.е. замкнутых линейных множеств), которую мы будем обозначать $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$.

Определение 1.1. ([4]) Система S называется представляющей системой подпространств (ПСП) в X, если произвольный $x \in X$ можно представить в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in X_k, k \geqslant 1$.

Отметим, что в случае банахова пространства X в книге [12] (определение 15.21) ПСП в X называется псевдоразложением X.

Определение 1.2. ([4]) Система S называется абсолютно представляющей системой подпространств в X, если произвольный $x \in X$ можно представить в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in X_k, k \geqslant 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$.

ПСП и АПСП являются естественным обобщением представляющих и абсолютно представляющих систем (все X_k одномерны) (см., например, [3]). Определения ПСП и АПСП можно давать и в более широких классах пространств, чем линейные нормированные (см.[4]); ПСП и АПСП в различных классах пространств изучались в работах Ю.Ф. Коробейника, А.В. Абанина, К.А.Михайлова и др. (см., например, [4],[1],[6]). В данной работе мы изучаем ПСП и АПСП в банаховых пространствах.

В параграфе 2 изучаются свойства ПСП в X, приведены достаточные условия для того, чтобы счётная система подпространств была ПСП в X, доказана теорема об устойчивости ПСП, а также показана связь между ПСП в гильбертовом пространстве и проблемой Гальперина.

В параграфе 3 приводятся различные критерии АПСП, изучаются свойства АПСП в X.

2. Представляющие системы подпространств в банаховых пространствах

2.1. **Некоторые свойства ПСП в банаховых пространствах.** Пусть X — банахово пространство, $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ — система его подпространств. Введём необходимые обозначения и определения. Для непустого $I \subset \mathbb{N}$ определим подпространство $S^{(I)}$ как замыкание линейной оболочки подпространств $X_i, i \in I$. Обозначим X^* сопряженное пространство к X; для $\varphi \in X^*$ обозначим $\varphi^{(S,I)}$ сужение φ на $S^{(I)}$. Ясно, что $\varphi^{(S,I)} \in (S^{(I)})^*$. Для разбиения $\pi = \{I_k\}$ (k пробегает конечное или счётное число значений) множества $\mathbb{N}$ определим

$$F_1(S, \pi, \varphi) = \sum_k \|\varphi^{(S,I_k)}\|, \varphi \in X^*.$$

Разбиение π множества $\mathbb{N}$ назовём последовательным, если оно имеет один из следующих двух видов:

(1) Множества $I_k = \{n(k-1)+1, n(k-1)+2, \ldots, n(k)\}, k \geqslant 1$ для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $n(1) < n(2) < \ldots$, $n(0) = 0$.

(2) Множества $I_k = \{n(k-1)+1, \ldots, n(k)\}, 1 \leqslant k \leqslant p$, $I_{p+1} = \{n(p)+1, n(p)+2, \ldots\}$ для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $n(1) < \ldots < n(p)$, $n(0) = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть S — ПСП в X. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного последовательного разбиения π множества $\mathbb{N}$ выполнено*

$$F_1(S, \pi, \varphi) \geqslant \varepsilon \|\varphi\|, \ \varphi \in X^*. \tag{2.1}$$

Доказательство. Определим пространство

$$D_c = \{\xi = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in X_k, k \geqslant 1, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится}\}$$

с нормой $\|\xi\| = \sup_{k \geqslant 1} \|x_1 + \ldots + x_k\|$. Легко проверить, что D_c банахово. Определим линейный оператор $A : D_c \to X$ равенством $A(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Тогда A ограничен (более того, $\|A\| \leqslant 1$). Поскольку S является ПСП в X, то $\mathrm{Im}(A) = X$. Из теоремы про открытое отображение следует существование числа $M > 0$ такого, что для произвольного $x \in X$ существует $\xi = (x_1, x_2, \ldots) \in D_c$, для которого $x = A\xi$ и $\|\xi\| \leqslant M\|x\|$. Тогда $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и для каждого $k \geqslant 1$ $\|x_1 + \ldots + x_k\| \leqslant M\|x\|$. Для натуральных $l \leqslant k$ определим $x_{l,k} = x_l + \ldots + x_k$, тогда $\|x_{l,k}\| \leqslant 2M\|x\|$. Для последовательного разбиения π первого вида и $\varphi \in X^*$ имеем

$$|\varphi(x)| = |\varphi(\sum_{k=1}^{\infty} x_{n(k-1)+1,n(k)})| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_{n(k-1)+1,n(k)})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi^{(S,I_k)}\| \|x_{n(k-1)+1,n(k)}\| \leqslant 2M\|x\| F_1(S, \pi, \varphi),$$

откуда, в силу произвольности $x \in X$, $F_1(S,\pi,\varphi) \geqslant (1/(2M))\|\varphi\|$. Для последовательного разбиения π второго вида такая же оценка доказывается аналогично. $\square$

Для подмножества $M \subset X$ обозначим $M^\perp$ множество всех $\varphi \in X^*$ таких, что $\varphi(x) = 0, x \in M$. Напомним (см., например, параграф 15 книги [12]), что система подпространств $G_k, k \geqslant 1$, банахова пространства E называется разложением Шаудера E, если для каждого $x \in E$ существуют и единственны $x_k \in G_k, k \geqslant 1$, такие, что $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Теорема 2.2. *Пусть S — ПСП в X. Тогда система подпространств $X'_k = \bigcap_{j\neq k} X_j^\perp, k \geqslant 1$ является разложением Шаудера в замыкании своей линейной оболочки.*

Доказательство. Достаточно доказать, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что для произвольных натуральных n, m и произвольных $\varphi \in \sum_{k=1}^{n} X'_k$, $\psi \in \sum_{k=n+1}^{n+m} X'_k$ выполнено $\|\varphi+\psi\| \geqslant \varepsilon\|\varphi\|$ (см. теорему 15.5 в [12]).

Из теоремы 2.1 следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного последовательного разбиения π выполнено неравенство (2.1). Пусть $\varphi \in \sum_{k=1}^{n} X'_k$, $\psi \in \sum_{k=n+1}^{n+m} X'_k$. Определим разбиение π так: $I_1 = \{1, 2, \ldots, n\}, I_2 = \{n+1, n+2, \ldots\}$. Тогда

$$\|\varphi+\psi\| \geqslant \|(\varphi+\psi)^{(S,I_1)}\| = \|\varphi^{(S,I_1)}\| = \|\varphi^{(S,I_1)}\| + \|\varphi^{(S,I_2)}\| \geqslant \varepsilon\|\varphi\|,$$

откуда следует нужное утверждение. $\square$

Будем говорить, что система подпространств S является перестановочной ПСП (ППСП) в X, если для произвольной биекции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ система подпространств $S_\sigma = (X; X_{\sigma(k)}, k \geqslant 1)$ является ПСП в X. Напомним (см., например, с.534 в [12]), что разложение Шаудера $G_k, k \geqslant 1$ банахова пространства E называется безусловным, если каждый сходящийся ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in G_k, k \geqslant 1$, сходится безусловно.

Теорема 2.3. *Пусть S — ППСП в X. Тогда система подпространств $X'_k = \bigcap_{j\neq k} X_j^\perp, k \geqslant 1$ является безусловным разложением Шаудера в замыкании своей линейной оболочки.*

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением (см. теорему 15.18 в [12]): если $G_k, k \geqslant 1,$ — система подпространств банахова пространства E, причём замыкание линейной оболочки $G_k, k \geqslant 1$, равно E, то $G_k, k \geqslant 1$, является безусловным разложением Шаудера E тогда и только тогда, когда для произвольной биекции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ система подпространств $G_{\sigma(k)}, k \geqslant 1$, является разложением Шаудера E. Теперь из теоремы 2.2 следует нужное утверждение. $\square$

2.2. **Достаточное условие для того, чтобы система подпространств была ПСП в X.** Пусть X — линейное нормированное пространство, $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ — система его подпространств. Для множества $F \subset X$ и элемента $x \in X$ обозначим $d(x, F)$ расстояние от x до F. Определим множество

$$\Delta(S) = \{x \in X \mid \liminf_{k\to\infty} d(x, X_k) = 0\}.$$

Теорема 2.4. *Если замыкание линейной оболочки $\Delta(S)$ равно X, то S является ППСП в X.*

Доказательство. Очевидно, для произвольной биекции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\Delta(S_\sigma) = \Delta(S)$. Поэтому достаточно доказать, что произвольная система подпространств S, удовлетворяющая условию теоремы, является ПСП в X.

Достаточно доказать, что произвольный $x \in X, \|x\| < 1$ может быть представлен в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in X_k$. Итак, пусть $x \in X, \|x\| < 1$. Для $k = 1, 2, \dots$ проделаем следующие операции.

Пусть для некоторого $k \geqslant 1$ у нас уже определены натуральные числа $N(l, i, j)$ для $l = 1, \dots, k-1$, $i = 1, \dots, r(l)$, $j = 1, \dots, N(l)$ и элементы $y_{l,i,j} \in X_{N(l,i,j)}$, причём

$$\|x - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{r(l)} \sum_{j=1}^{N(l)} y_{l,i,j}\| < 2^{-(k-1)}$$

(для $k = 1$ ничего не определено). Обозначим $z = x - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{r(l)} \sum_{j=1}^{N(l)} y_{l,i,j}$, тогда $\|z\| < 2^{-(k-1)}$ (для $k = 1$ определяем $z = x$). Существует $N(k) \in \mathbb{N}$ и элементы $x_{k,j} \in \Delta(S), j = 1, \dots, N(k)$, такие, что

$$\|z - \sum_{j=1}^{N(k)} x_{k,j}\| < 2^{-k}. \tag{2.2}$$

Выберем $r(k) \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\|x_{k,j}/r(k)\| < 2^{-k}(N(k))^{-1},\ j = 1, \dots, N(k). \tag{2.3}$$

Неравенство (2.2) перепишем в виде

$$\|z - \Big(\underbrace{\frac{x_{k,1} + \ldots + x_{k,N(k)}}{r(k)} + \ldots + \frac{x_{k,1} + \ldots + x_{k,N(k)}}{r(k)}}_{r(k)}\Big)\| < 2^{-k}. \tag{2.4}$$

Из $\|z\| < 2^{-(k-1)}$ и (2.2) следует, что $\| \sum_{j=1}^{N(k)} x_{k,j}\| < 2^{-(k-1)} + 2^{-k}$. Поэтому для произвольного $a = 1, \dots, r(k) - 1$ имеем:

$$\|\underbrace{\frac{x_{k,1} + \ldots + x_{k,N(k)}}{r(k)} + \ldots + \frac{x_{k,1} + \ldots + x_{k,N(k)}}{r(k)}}_{a}\| < 2^{-(k-1)} + 2^{-k} \tag{2.5}$$

Ясно, что $x_{k,j}/r(k) \in \Delta(S)$ для $j = 1, \dots, N(k)$. Используя неравенства (2.3),(2.4),(2.5) несложно видеть, что существуют натуральные числа $N(k, i, j), i = 1, \dots, r(k); j = 1, \dots, N(k)$ и элементы $y_{k,i,j} \in X_{N(k,i,j)}$, такие, что

(1) $N(k-1, r(k-1), N(k-1)) < N(k, 1, 1)$ (для $k = 1$ это условие отсутствует); $N(k, i, j) < N(k, i', j')$ если $i < i'$; $N(k, i, j) < N(k, i, j')$ если $j < j'$;

(2) $\|z-\sum_{i=1}^{r(k)}\sum_{j=1}^{N(k)} y_{k,i,j}\| < 2^{-k}$, т.е.

$$\|x-\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{r(l)}\sum_{j=1}^{N(l)} y_{l,i,j}\| < 2^{-k};$$

(3) для произвольного $a=1,\ldots,r(k)-1$

$$\|\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{N(k)} y_{k,i,j}\| < 2^{-(k-1)}+2^{-k};$$

(4) $\|y_{k,i,j}\| < 2^{-k}(N(k))^{-1}$ для всех $i=1,2,\ldots,r(k), j=1,2,\ldots,N(k)$.

Действительно, сначала выберем $N(k,1,1)$ и $y(k,1,1)$ (достаточно близко к $x_{k,1}/r(k)$), затем $N(k,1,2)$ и $y_{k,1,2}$ (достаточно близко к $x_{k,2}/r(k)$), …, затем $N(k,1,N(k))$ и $y_{k,1,N(k)}$ (достаточно близко к $x_{k,N(k)}/r(k)$), затем переходим к выбору «второй группы»: $N(k,2,1)$ и $y(k,2,1)$ (достаточно близко к $x_{k,1}/r(k)$) и т.д.

Выполнив такие операции, получим набор элементов $y_{l,i,j}\in X_{N(l,i,j)}$, где $l=1,2,\ldots$, $i=1,\ldots,r(l)$, $j=1,2\ldots,N(l)$. По построению $N(l,i,j)<N(l',i',j')$ если $l<l'$; $N(l,i,j)<N(l,i',j')$ если $i<i'$; $N(l,i,j)<N(l,i,j')$ если $j<j'$. Покажем, что

$$\begin{aligned} x = {} & y_{1,1,1}+y_{1,1,2}+\ldots+y_{1,1,N(1)}+y_{1,2,1}+\ldots+y_{1,2,N(1)}+\ldots+ \\ & + y_{1,r(1),1}+\ldots+y_{1,r(1),N(1)}+y_{2,1,1}+\ldots+y_{2,1,N(2)}+y_{2,2,1}+\ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для этого рассмотрим сумму первых s членов ряда в правой части (2.6). Представим s в виде $s=r(1)N(1)+\ldots+r(k-1)N(k-1)+aN(k)+b$, где $0\leqslant a\leqslant r(k)-1$, $0\leqslant b\leqslant N(k)-1$. Оценим

$$\delta_s=\|x-\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{r(l)}\sum_{j=1}^{N(l)} y_{l,i,j}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{N(k)} y_{k,i,j}-\sum_{j=1}^{b} y_{k,a+1,j}\|.$$

Из построения $y_{l,i,j}$ следуют оценки

$$\|x-\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{r(l)}\sum_{j=1}^{N(l)} y_{l,i,j}\| < 2^{-(k-1)}, \tag{2.7}$$

$$\|\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{N(k)} y_{k,i,j}\| < 2^{-(k-1)}+2^{-k}, \tag{2.8}$$

$$\|\sum_{j=1}^{b} y_{k,a+1,j}\| < N(k)2^{-k}(N(k))^{-1}=2^{-k}. \tag{2.9}$$

Из неравенств (2.7),(2.8),(2.9) следует $\delta_s<6\cdot 2^{-k}\to 0$, $s\to\infty$. Поэтому справедливо равенство (2.6). Дополняя его в нужных местах нулями, получим искомое разложение $x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k\in X_k$. $\square$

Приведём пример системы S, для которой выполнено условие теоремы 2.4. Для двух подпространств Y, Z пространства X определим

$$\rho_0(Y,Z) = \sup\{d(y,Z) \mid y \in Y, \|y\| = 1\}. \tag{2.10}$$

Пример 2.1. Пусть система подпространств $Y_j, j \in \Lambda$ (Λ — некоторое множество индексов) такова, что замыкание линейной оболочки $Y_j, j \in \Lambda$ равно X. Пусть система $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ такова, что для каждого $j \in \Lambda$ существует последовательность натуральных чисел $k(1) < k(2) < \ldots$, для которой $\lim_{n\to\infty} \rho_0(Y_j, X_{k(n)}) = 0$. Тогда для каждого $j \in \Lambda$ $Y_j \subset \Delta(S)$. Поэтому S удовлетворяет условию теоремы 2.4, а значит, является ПСП в X.

Замечание 1. Если система S удовлетворяет условию теоремы 2.4, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ система $S_{(\geqslant n)} = (X; X_{k+n-1}, k \geqslant 1)$ также удовлетворяет условию теоремы 2.4, а поэтому является ПСП в X. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ замыкание линейной оболочки подпространств $X_k, k \geqslant n$ равно X. Последнее условие не является достаточным для того, чтобы S была ПСП в X. Это показывает следующий пример (который относится к математическому фольклору).

Пусть $X = L_p([0,1], dx)$ ($p \in [1,\infty)$), подпространство X_k порождено $x^k, k \geqslant 0$ (нам удобнее нумеровать подпространства числами $0, 1, 2, \ldots$, а не $1, 2, \ldots$). Тогда для всех $n \geqslant 0$ замыкание линейной оболочки $X_k, k \geqslant n$ равно X, но S не есть ПСП в X. Действительно, если $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (сходимость по норме пространства X), то $\|a_k x^k\| \to 0$, $k \to \infty$, а поэтому для всех достаточно больших k $|a_k| \leqslant (kp+1)^{1/p}$. Поэтому $f(x) \in C^\infty([0,1))$.

2.3. **Об одном достаточном условии для того, чтобы $x \in X$ допускал разложение по системе подпространств S в случае гильбертова пространства X.** Пусть X — гильбертово пространство. Для подпространства $Y \subset X$ обозначим P_Y ортопроектор на Y. Пусть $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ — система подпространств X. Рассмотрим произвольный $x \in X$ и попробуем разложить его по системе подпространств S, т.е. представить в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in X_k, k \geqslant 1$.

Естественно попробовать определить искомое разложение следующим образом:

$$x = P_{X_1}x + (I - P_{X_1})x = P_{X_1}x + P_{X_2}(I - P_{X_1})x + (I - P_{X_2})(I - P_{X_1})x = \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P_{X_k}(I - P_{X_{k-1}})\ldots(I - P_{X_1})x + (I - P_{X_n})\ldots(I - P_{X_1})x = \ldots$$

Определим операторы $E_0 = I$, $E_n = (I - P_{X_n})\ldots(I - P_{X_1}), n \geqslant 1$. Обозначим $x_n = P_{X_n}E_{n-1}x, n \geqslant 1$, тогда $x = \sum_{k=1}^{n} x_k + E_n x, n \geqslant 1$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Если $E_n x \to 0$, $n \to \infty$, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.*

Таким образом, если последовательность операторов E_n сходится к 0 сильно при $n \to \infty$, то система подпространств S является ПСП в X. Однако вопрос о сильной сходимости E_n к 0 может оказаться очень сложным. Рассмотрим следующий пример.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $H_k, 1 \leqslant k \leqslant N$ — подпространства X, причём $\bigcap_{k=1}^{N} H_k = 0$. Пусть отображение $i(\cdot) : \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ таково, что $i(k+1) \neq i(k), k \geqslant 1$ и для каждого $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ существует бесконечно много k, для которых $i(k) = m$. Определим $X_k = H_{i(k)}^{\perp}, k \geqslant 1$. Тогда $E_n = P_{H_{i(n)}} \ldots P_{H_{i(1)}}, n \geqslant 1$. Известно, что E_n сходится к 0 слабо при $n \to \infty$ (см.[9]). Вопрос о сильной сходимости E_n к 0 при $n \to \infty$ называется проблемой Гальперина и является чрезвычайно сложным (см., например, [10]). В то же время из теоремы 2.4 следует, что S является ПСП в X.

2.4. **Устойчивость ПСП в банаховых пространствах.** Пусть X — банахово пространство, $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ — система подпространств X. Мы покажем, что если подпространства $X_k, \widetilde{X}_k$ достаточно «близки», $k \geqslant 1$, то система подпространств $\widetilde{S} = (X; \widetilde{X}_k, k \geqslant 1)$ также является ПСП в X. За меру «близости» подпространств выберем величину $\rho_0(X_k, \widetilde{X}_k)$, определённую формулой (2.10). Для доказательства соответствующих результатов мы обобщим результаты параграфов 2,3 работы [7], в которой рассматриваются системы одномерных подпространств, на произвольные системы подпространств.

Введём необходимые определения (обобщающие определения параграфа 2 работы [7]). Для набора $P = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_k \in X_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, определим $\Sigma(P) = \sum_{k=1}^{n} x_k$, а также

$$\Theta_S(P) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \| \sum_{j=1}^{k} x_j \|.$$

Для $x \in X, \varepsilon > 0$ определим

$$\Theta_S(x, \varepsilon) = \inf\{\Theta_S(P) \mid \|\Sigma(P) - x\| \leqslant \varepsilon\}.$$

(Мы считаем, что $\inf(\varnothing) = \infty$.) Для $x \in X$ определим

$$\Theta_S^*(x) = \sup\{\Theta_S(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \Theta_S(x, \varepsilon).$$

Наконец, определим

$$\overline{\Theta}_S = \sup\{\Theta_S^*(x) \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

Следующие две леммы и теорема доказываются точно так же, как леммы 1,2 и теорема 1 в [7].

Лемма 2.1. *Если* $\Theta_S^*(x) < \infty$ *для произвольного* $x \in X$, *то* $\Theta_S^*(x)$ — *норма на* X, *эквивалентная* $\| \cdot \|$.

Лемма 2.2. *Если для некоторых* $\alpha \in (0,1), B > 0$ *выполнено* $\Theta_S(x, \alpha\|x\|) \leqslant B\|x\|, x \in X$, *то* $\Theta_S^*(x) \leqslant \frac{B}{1-\alpha}\|x\|, x \in X$.

Теорема 2.5. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) S *является ПСП в* X,
(2) *существуют* $\alpha \in (0,1), B > 0$, *такие, что для произвольного* $x \in X$ $\Theta_S(x, \alpha\|x\|) \leqslant B\|x\|$,
(3) $\Theta_S^*(x) < \infty$ *для произвольного* $x \in X$,

(4) $\overline{\Theta}_S < \infty$.

Теперь установим теорему об устойчивости ПСП в X.

Теорема 2.6. *Пусть S — ПСП в X. Если система подпространств $\widetilde{S} = (X; \widetilde{X}_k, k \geqslant 1)$ такова, что $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_0(X_k, \widetilde{X}_k) < (2\overline{\Theta}_S)^{-1}$, то $\widetilde{S}$ является ПСП в X.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [7]. Пусть $x \in X, x \neq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует $P = (x_1, \ldots, x_n), x_k \in X_k$, такой, что

$$\|x - \Sigma(P)\| \leqslant \varepsilon,\ \Theta_S(P) \leqslant \overline{\Theta}_S(1+\varepsilon)\|x\|.$$

Тогда $\|x_k\| \leqslant 2\overline{\Theta}_S(1+\varepsilon)\|x\|, 1 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим $d_k = \rho_0(X_k, \widetilde{X}_k), k \geqslant 1$. Для произвольного $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, существует $\widetilde{x}_k \in \widetilde{X}_k$, для которого $\|x_k - \widetilde{x}_k\| \leqslant d_k(1+\varepsilon)\|x_k\|$. Определим $\widetilde{P} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$. Тогда

$$\|x - \Sigma(\widetilde{P})\| \leqslant \|x - \Sigma(P)\| + \|\Sigma(P) - \Sigma(\widetilde{P})\| \leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} d_k(1+\varepsilon)\|x_k\| \leqslant \varepsilon + 2\overline{\Theta}_S(1+\varepsilon)^2\|x\| \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Для произвольного $m, 1 \leqslant m \leqslant n$, имеем

$$\|\sum_{k=1}^{m} \widetilde{x}_k\| \leqslant \|\sum_{k=1}^{m} x_k\| + \|\sum_{k=1}^{m}(\widetilde{x}_k - x_k)\| \leqslant \overline{\Theta}_S(1+\varepsilon)\|x\| + 2\overline{\Theta}_S(1+\varepsilon)^2\|x\| \sum_{k=1}^{m} d_k.$$

Зафиксируем $\alpha \in (2\overline{\Theta}_S \sum_{k=1}^{\infty} d_k, 1)$, $B > \overline{\Theta}_S + 2\overline{\Theta}_S \sum_{k=1}^{\infty} d_k$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ из доказаных неравенств имеем $\Theta_{\widetilde{S}}(x, \alpha\|x\|) \leqslant B\|x\|$. Поэтому $\widetilde{S}$ является ПСП в X. $\square$

3. Абсолютно представляющие системы подпространств в банаховых пространствах

3.1. **Критерии АПСП.** Пусть X — банахово пространство, $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ — система подпространств X. Определим $l_1(X_1, X_2, \ldots)$ как множество последовательностей $\xi = (x_1, x_2, \ldots), x_k \in X_k$, для которых $\|\xi\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Ясно, что $l_1(X_1, X_2, \ldots)$ — банахово пространство. Определим оператор $A : l_1(X_1, X_2, \ldots) \to X$ равенством $A(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Система S является АПСП в X тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(A) = X$. Хорошо известно, что это равносильно тому, что $A^* : X^* \to (l_1(X_1, X_2, \ldots))^*$ является изоморфным вложением, т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ $\|A^*\varphi\| \geqslant \varepsilon\|\varphi\|, \varphi \in X^*$. Легко видеть, что $(l_1(X_1, X_2, \ldots))^* = l_\infty(X_1^*, X_2^*, \ldots)$ — множество всех последовательностей $\eta = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots), \varphi_k \in X_k^*$, для которых $\|\eta\| = \sup_k \|\varphi_k\| < \infty$. При этом действие $\eta(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_k)$. Легко видеть, что $A^*\varphi = (\varphi^{(S,1)}, \varphi^{(S,2)}, \ldots)$, где $\varphi^{(S,k)}$ обозначено сужение φ на X_k. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *S является АПСП в X тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\sup_k \|\varphi^{(S,k)}\| \geqslant \varepsilon\|\varphi\|, \varphi \in X^*. \tag{3.1}$$

Отметим, что теорему 3.1 можно сформулировать следующим образом (уменьшив ε): S является АПСП в X тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного $\varphi \in X^*, \|\varphi\| = 1$ существуют $k \geqslant 1, x \in X_k, \|x\| = 1$ такие, что $|\varphi(x)| \geqslant \varepsilon$.

Понятие АПСП тесно связано с понятием абсолютно представляющего семейства (АПСм). Напомним (см., например, [5]), что множество $D \subset X$ называется АПСм в X если для произвольного $x \in X$ существуют $a_j \in \mathbb{K}$, $x_j \in D$, такие, что $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j x_j\| < \infty$. АПСм в банаховых и гильбертовых пространствах изучались в [13],[2],[8]. Для системы подпространств S определим $D(S) = \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in X_k, \|x\| = 1\}$. Ясно, что S является АПСП в X тогда и только тогда, когда $D(S)$ является АПСм в X.

Приведенный критерий для АПСП (см. абзац после теоремы 3.1) можно получить из следующего хорошо известного критерия для АПСм (см., например, теорему 1 в [5], теорему 2.1 в [13]), который доказывается аналогично теореме 3.1. (Множество D называется нормированным, если $\|x\| = 1, x \in D$.)

Теорема 3.2. *Пусть D — нормированное множество в X. D является АПСм в X тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного $\varphi \in X^*, \|\varphi\| = 1$, существует $x \in D$ такой, что $|\varphi(x)| \geqslant \varepsilon$.*

Далее мы докажем критерий для АПСм в X, из которого непосредственно следует критерий для АПСП в X (вместо D надо взять $D(S)$). Следующая теорема обобщает теорему 3 в [8] и показывает, что в теореме 3.2 условие произвольности $\varphi \in X^*$ можно ослабить. (Будем говорить, что D тотально в X, если замыкание линейной оболочки D равно X).

Теорема 3.3. *Пусть X — банахово пространство, Y — конечномерное подпространство X, D — тотальное в X нормированное множество. D является АПСм в X тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного $\varphi \in Y^{\perp}, \|\varphi\| = 1$ существует $x \in D$ такой, что $|\varphi(x)| \geqslant \varepsilon$.*

Для доказательства нам нужна следующая лемма (которая относится к математическому фольклору).

Лемма 3.1. *Пусть Y, Z — подпространства банахова пространства X. Если $Y \cap Z = 0$ и $Y + Z = X$, то существует $c > 0$ такое, что для произвольных $y \in Y, z \in Z$ $\|y + z\| \geqslant c(\|y\| + \|z\|)$.*

Доказательство. Определим пространство $Y \oplus Z$ как множество пар $\xi = (y, z), y \in Y, z \in Z$, с нормой $\|\xi\| = \|y\| + \|z\|$. Ясно, что $Y \oplus Z$ банахово. Определим оператор $A : Y \oplus Z \to X$ равенством $A(y, z) = y + z$. Тогда A ограничен, $\ker A = 0$, $\mathrm{Im} A = X$. Поэтому A обратим, откуда непосредственно следует нужное утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 3.3. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что D — не АПСм в X. Поскольку Y конечномерно, то оно дополняемо в X, т.е. существует подпространство Z такое, что $Y \cap Z = 0$ и $Y + Z = X$. Существует

$c_1 > 0$ такое, что

$$\|y+z\| \geqslant c_1(\|y\|+\|z\|),\ y \in Y, z \in Z. \tag{3.2}$$

Выберем в Y нормированный базис $e_1, \dots, e_m$. Существует $c_2 > 0$ такое, что для произвольных $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$ $\|\sum_{k=1}^m t_k e_k\| \geqslant c_2 \sum_{k=1}^m |t_k|$.

Рассмотрим произвольное $\delta > 0$. Поскольку D тотально в X, существуют элементы $f_1, \dots, f_m$ из линейной оболочки D, такие, что $\|e_k - f_k\| < \delta, \|f_k\| = 1$ для $k = 1, \dots, m$. Ясно, что $\{f_1, \dots, f_m\} \cup D$ не является АПСм в X. Поэтому существует $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$ такой, что $|\varphi(f_k)| \leqslant \delta$ для $1 \leqslant k \leqslant m$, $|\varphi(x)| \leqslant \delta$ для $x \in D$. Определим линейные функционалы ψ, η равенствами $\psi(y+z) = \varphi(z)$, $\eta(y+z) = \varphi(y)$, $y \in Y, z \in Z$. Из неравенства (3.2) следует, что $\psi, \eta \in X^*$. Более того, $\psi \in Y^\perp$, $\eta \in Z^\perp$.

Оценим $\|\eta\|$. Пусть $y \in Y$, $y = \sum_{k=1}^m t_k e_k$. Тогда

$$|\varphi(y)| \leqslant \sum_{k=1}^m |t_k||\varphi(e_k)| \leqslant \sum_{k=1}^m |t_k|(|\varphi(e_k - f_k)| + |\varphi(f_k)|) \leqslant 2\delta \sum_{k=1}^m |t_k| \leqslant 2\delta c_2^{-1}\|y\|.$$

Поэтому для произвольных $y \in Y, z \in Z$

$$|\eta(y+z)| = |\varphi(y)| \leqslant 2\delta c_2^{-1}\|y\| \leqslant 2c_1^{-1}c_2^{-1}\delta\|y+z\|.$$

Положим $c_3 = 2c_1^{-1}c_2^{-1}$, тогда $\|\eta\| \leqslant c_3\delta$.

Поскольку $\|\varphi\| = 1$, то $\|\psi\| \geqslant (1 - c_3\delta)$. Для произвольного $x \in D$ $|\psi(x)| \leqslant \delta(1+c_3)$. Положим $\widetilde{\psi} = \psi/\|\psi\|$. Тогда $\widetilde{\psi} \in Y^\perp$, $\|\widetilde{\psi}\| = 1$. Для произвольного $x \in D$ $|\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \delta(1+c_3)/(1-c_3\delta)$. При достаточно малых δ получим противоречие. $\square$

Рассмотрим АПСП в равномерно гладких пространствах (АПСм в равномерно гладких пространствах изучались в [13],[2]). Напомним определение равномерно гладкого пространства. Определим модуль гладкости пространства X равенством

$$\rho(\tau) = \sup\{(\|x+y\| + \|x-y\|)/2 - 1 \mid \|x\| = 1, \|y\| = \tau\},\ \tau > 0.$$

X называется равномерно гладким если $\rho(\tau)/\tau \to 0$ при $\tau \to 0$. Для нас равномерно гладкие пространства важны по следующей причине: как мы увидим при доказательстве следующей теоремы, если S — АПСП в равномерно гладком X, то для каждого $x \in X$ разложение x в абсолютно сходящийся ряд по системе подпространств S может быть получено простым «естественным» образом.

Будем говорить, что множество A является λ-сетью для множества B, если для произвольного $x \in B$ существует $y \in A$ такой, что $\|x - y\| \leqslant \lambda$. Обозначим $V_X = \{x \in X, \|x\| = 1\}$. Напомним, что для системы подпространств $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ $D(S) = \bigcup_{k=1}^\infty V_{X_k}$.

Теорема 3.4. *Пусть X — равномерно гладкое банахово пространство. Тогда утверждения равносильны:*

(1) $S = (X; X_k, k \geqslant 1)$ *является АПСП в X,*
(2) *существуют $\tau, \lambda \in (0,1)$ такие, что $\tau D(S)$ — λ-сеть для V_X,*
(3) $\lambda_S = \sup_{\|x\|=1} \inf_{k \geqslant 1} d(x, X_k) < 1$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Для действительного пространства X нужное утверждение следует из теоремы 3.1 в [13]. Для комплексного X рассмотрим X как пространство над $\mathbb{R}$ и из упомянутой теоремы получим нужное.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в [2]. Фиксируем $\lambda \in (\lambda_S, 1)$. Рассмотрим произвольный $x \in X$. Существуют $i(1) \in \mathbb{N}$, $x_1 \in X_{i(1)}$ такие, что $\|x - x_1\| \leqslant \lambda\|x\|$. Определим $y_1 = x - x_1$, тогда $\|y_1\| \leqslant \lambda\|x\|$ и $x = x_1 + y_1$. Далее проделаем аналогичную процедуру. Пусть мы имеем разложение $x = x_1 + \ldots + x_k + y_k$. Существуют $i(k+1) \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} \in X_{i(k+1)}$ такие, что $\|y_k - x_{k+1}\| \leqslant \lambda\|y_k\|$. Определим $y_{k+1} = y_k - x_{k+1}$, тогда $\|y_{k+1}\| \leqslant \lambda\|y_k\|$ и $x = x_1 + \ldots + x_{k+1} + y_{k+1}$. Индукцией по k легко установить, что $\|y_k\| \leqslant \lambda^k\|x\|, k \geqslant 1$. Поэтому

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{3.3}$$

Ясно, что $\|x_k\| \leqslant \lambda^{k-1}(1+\lambda)\|x\|, k \geqslant 1$, поэтому $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| \leqslant ((1+\lambda)/(1-\lambda))\|x\|$. Для $k \geqslant 1$ определим $z_k = \sum_{j:i(j)=k} x_j$, тогда $z_k \in X_k$. Из (3.3) имеем $x = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$. □

Замечание 2. В работе [2] доказано, что каждая АПС (одномерных подпространств) в равномерно гладком X является «быстрой» ПС (см. определение 3 и теорему 3 в [2]). Аналогичное утверждение верно для АПСП. Как следует из доказательства теоремы 3.4, (3) $\Rightarrow$ (1), каждая АПСП S в равномерно гладком X является «быстрой» ПСП (наше определение согласовано с определением 3 в [2]): существуют $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$ такие, что для произвольного $x \in X$ существует инъективное отображение $k \mapsto n(k)$ и элементы $y_k \in X_{n(k)}$ такие, что $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ и $\|y_k\| \leqslant C\lambda^k\|x\|, k \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь АПСП в гильбертовых пространствах; как мы увидим далее, критерий для АПСП в гильбертовых пространствах приобретает геометрическую наглядность (см. также теоремы 1,2 в [8]). Итак, пусть X гильбертово. Тогда X^* можно отождествить с X: $\varphi(\cdot) = (\cdot, \varphi)$. S является АПСП в X тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного $\varphi \in V_X$ существует $x \in D(S)$ такой, что $|(x, \varphi)| \geqslant \varepsilon$.

Теорема 3.5. *Пусть $\tau > 0, \varepsilon \in (0,1]$. Следующие условия равносильны:*

(1) *для произвольного $\varphi \in V_X$ существует $x \in D(S)$ такой, что $|(x,\varphi)| \geqslant \varepsilon$,*

(2) *$\tau D(S)$ является $\sqrt{1+\tau^2-2\tau\varepsilon}$-сетью для V_X.*

Доказательство. Для произвольных $\varphi \in V_X, x \in D(S)$ имеем $\|\varphi - \tau x\|^2 = 1 + \tau^2 - 2\tau\mathrm{Re}(x,\varphi)$. Из этого равенства очевидным образом следует нужное утверждение. □

Следствие 3.1. *Пусть $\tau > 0$. Система подпространств S является АПСП в X тогда и только тогда, когда существует $\lambda \in (0, \sqrt{1+\tau^2})$ такое, что $\tau D(S)$ является λ-сетью для V_X.*

3.2. **Об одном свойстве АПСП.** Перед тем, как сформулировать и доказать следующую теорему, напомним определение C-выпуклого пространства и некоторые свойства C-выпуклых пространств.

Пусть Y — банахово пространство над $\mathbb{R}$. Обозначим $c_0(\mathbb{R})$ множество последовательностей $\xi = (z_1, z_2, \dots), z_k \in \mathbb{R}$, для которых $z_k \to 0$ при $k \to \infty$, с нормой $\|\xi\| = \sup_k |z_k|$. Y называется C-выпуклым, если $c_0(\mathbb{R})$ не является финитно представимым в Y (см., например, параграфы 5.1, 5.2 книги [11] и библиографию в конце параграфа 5.2). Для натурального n определим

(3.4)

$$C(n,Y) = \inf\left\{\max\left\{\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k\| \mid \alpha_k = \pm 1, 1 \leqslant k \leqslant n\right\} \mid y_k \in Y, \|y_k\| \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}.$$

В из лемм 5.2.1, 5.2.2 и теоремы 5.2.2 книги [11] следует, что Y C-выпукло тогда и только тогда, когда $C(n,Y) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть Y — банахово пространство над $\mathbb{C}$. Обозначим $c_0(\mathbb{C})$ множество последовательностей $\xi = (z_1, z_2, \dots), z_k \in \mathbb{C}$, для которых $z_k \to 0$ при $k \to \infty$, с нормой $\|\xi\| = \sup_k |z_k|$. Y называется C-выпуклым, если $c_0(\mathbb{C})$ не является финитно представимым в Y. Для натурального n определим $C(n,Y)$ формулой (3.4); величину $C_{\mathbb{C}}(n,Y)$ формулой (3.4), только максимум берётся по $|\alpha_k| = 1, \alpha_k \in \mathbb{C}$. Перенося леммы 5.2.1, 5.2.2 и теорему 5.2.2 книги [11] на случай комплексных пространств, получим, что Y C-выпукло тогда и только тогда, когда $C_{\mathbb{C}}(n,Y) \to \infty$ при $n \to \infty$. Поскольку для произвольных $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, |\alpha_k| \leqslant 1$ и произвольных $y_1, \dots, y_n \in Y$

$$\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k\| \leqslant \|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}(\alpha_k) y_k\| + \|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(\alpha_k) y_k\| \leqslant 2\max_{\beta_k=\pm 1}\|\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k\|,$$

то $C_{\mathbb{C}}(n,Y) \leqslant 2C(n,Y)$, а поэтому Y C-выпукло тогда и только тогда, когда $C(n,Y) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для $I \subset \mathbb{N}$ обозначим $\min(I)$ наименьший элемент множества I.

Теорема 3.6. *Предположим, что X^* C-выпукло. Если S — АПСП в X, то существует N_0, такое, что для произвольного конечного $I \subset \mathbb{N}$, удовлетворяющего $\min(I) \geqslant N_0$, система подпространств $X_k, k \notin I$ является АПСП в X.*

Теорема 3.6 очевидным образом следует из следующей леммы.

Лемма 3.2. *Пусть $I_1, I_2, \dots$ — подмножества $\mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Предположим, каждое натуральное n принадлежит не более чем m множествам I_j. Тогда для некоторого j система подпространств $X_k, k \notin I_j$ является АПСП в X.*

Доказательство. Существует $\varepsilon > 0$, для которого выполнено (3.1). Предположим, утверждение леммы неверно. Тогда для произвольного j существует $\varphi_j \in X^*, \|\varphi_j\| = 1$, такой, что $\|\varphi_j^{(S,k)}\| \leqslant 2^{-j}$ для всех $k \notin I_j$. Рассмотрим произвольное $n \in \mathbb{N}$. Существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{\pm 1\}$, для которых $\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j\| \geqslant C(n, X^*)$. Определим $\varphi = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j$. Тогда $\|\varphi\| \geqslant C(n,X^*)$ и для произвольного k $\|\varphi^{(S,k)}\| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j^{(S,k)}\| \leqslant m+1$. Из неравенства (3.1) следует $m+1 \geqslant \varepsilon C(n,X^*)$, что, в силу произвольности n, противоречит C-выпуклости X^*. □

3.3. **Устойчивость АПСП.**

Теорема 3.7. *Если S является АПСП в X, то существует $\delta > 0$ такое, что произвольная система $\widetilde{S} = (X; \widetilde{X}_k, k \geqslant 1)$, удовлетворяющая $\sup_k \rho_0(X_k, \widetilde{X}_k) < \delta$, является АПСП в X.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено неравенство (3.1). Покажем, что если для системы подпространств $\widetilde{S}$ $d = \sup_k \rho_0(X_k, \widetilde{X}_k) < \varepsilon$, то $\widetilde{S}$ является АПСП в X. Выберем $\varepsilon_1 < \varepsilon, d_1 > d$, причём $d_1 < \varepsilon_1$. Рассмотрим произвольный $\varphi \in X^*, \|\varphi\| = 1$. Существует $k \in \mathbb{N}$ и $x \in X_k, \|x\| = 1$, такие, что $|\varphi(x)| \geqslant \varepsilon_1$. Существует $\widetilde{x} \in \widetilde{X}_k$, для которого $\|x - \widetilde{x}\| \leqslant d_1$. Имеем

$$|\varphi(\widetilde{x})| \geqslant |\varphi(x)| - |\varphi(x - \widetilde{x})| \geqslant (\varepsilon_1 - d_1), \ \|\widetilde{x}\| \leqslant (1 + d_1),$$

откуда $\|\varphi^{(\widetilde{S},k)}\| \geqslant (\varepsilon_1 - d_1)/(1 + d_1)$. Поэтому $\widetilde{S}$ — АПСП в X. □

Список литературы

[1] *Абанин А.В.* Индуктивные абсолютно представляющие системы подпространств // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование.— Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006, С. 27-34.

[2] *Вершинин Р.В.* О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховых пространствах // Матем. физ., анал., геом.— 1998.— Т.5, №1/2.— С.3-14.

[3] *Коробейник Ю.Ф.* Представляющие системы // УМН.— 1981.— Т.36,Вып. 1 (217).— С.73-126.

[4] *Коробейник Ю.Ф.* О представляющих системах подпространств // Мат. заметки.— 1985.— Т.38,№5.— С.741-755.

[5] *Коробейник Ю.Ф.* Об абсолютно представляющих семействах в некоторых классах локально выпуклых пространств // Изв. вузов. Матем.— 2009.— № 9.— С.25-35.

[6] *Михайлов К.А.* Абсолютно представляющие системы подпространств в пространствах пробных ультрадифференцируемых функций // Изв. Вузов. Сев. Кав. регион. Естественные науки.— 2009.— № 6.— С. 8-11.

[7] *Слепченко А.Н.* О некоторых обобщениях базисов банаховых пространств // Матем. сб.— 1983.— Т. 121 (163),№ 2 (6).— С.272-285.

[8] *Шрайфель И.С.* Об абсолютно представляющих системах в гильбертовых пространствах // Изв. вузов. Матем.— 1995.— №9.— С.78-82.

[9] *Amemiya I., Ando T.* Convergence of random products of contractions in Hilbert space // Acta Sci. Math. Szeged.— 1965.— V.26.— P.239-244.

[10] *Bauschke H.H.* Projection algorithms: results and open problems // Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Haifa 2000).— D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich (editors).— Elsevier, 2001.— P.11-22.

[11] *Kadets M.I., Kadets V.M.* Series in Banach spaces. Conditional and Unconditional convergence.— Birkhäuser Verlag, Basel, Boston,Berlin, 1997.

[12] *Singer I.* Bases in Banach spaces II.— Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.— 880 p.

[13] *Vershynin R.* Absolutely representing systems, uniform smoothness, and type // arXiv: math/ 9804044v1 [math.FA] 8 Apr 1998.